


Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение  
высшего образования  
«Тамбовский государственный университет имени Г.Р. Державина»  
Институт математики, физики и информационных технологий  
Кафедра функционального анализа

УТВЕРЖДАЮ:  
Директор института математики,  
физики и информационных технологий  
Королева Н.Л.  
«11» марта 2022 г.



## **РАБОЧАЯ ПРОГРАММА**

по дисциплине  
**«Теория отображений полуупорядоченных пространств»**

Научная специальность:

1.1.2. Дифференциальные уравнения и математическая физика

Уровень высшего образования  
подготовка кадров высшей квалификации  
по программам подготовки научных и  
научно-педагогических кадров в аспирантуре

Форма обучения  
очная

Год набора  
2022

**Автор программы:** Жуковский Евгений Семенович, доктор физико-математических наук, профессор

Рабочая программа составлена в соответствии с федеральными государственными требованиями к структуре программ подготовки научных и научно-педагогических кадров в аспирантуре (адъюнктуре), условиям их реализации, срокам освоения этих программ с учетом различных форм обучения, образовательных технологий и особенностей отдельных категорий аспирантов (адъюнктов) (приказ Минобрнауки России от 20 октября 2021 г. № 951).

Рабочая программа принята на заседании кафедры функционального анализа «09» марта 2022 года Протокол № 6.

## **СОДЕРЖАНИЕ**

1. Цели и задачи дисциплины
2. Место дисциплины в структуре программы аспирантуры
3. Объем и содержание дисциплины
4. Контроль знаний обучающихся
5. Учебно-методическое и информационное обеспечение дисциплины
6. Материально-техническое обеспечение дисциплины, программное обеспечение, профессиональные базы данных и информационные справочные системы

## **1. Цели и задачи дисциплины**

**1.1 Цель дисциплины** – изучение теории полуупорядоченных пространств, формирование умений и навыков решения задач функционального анализа в полуупорядоченных пространствах, задач нахождения оценок решений дифференциальных, функционально-дифференциальных, интегральных уравнений и включений, формирование умений и навыков применения математических методов в решении прикладных задач.

### **1.2 Задачи дисциплины:**

- изучение теории полуупорядоченных пространств;
- изучение свойств однозначных и многозначных отображений, действующих в полуупорядоченных пространствах;
- исследование задач, которые сводятся к операторным уравнениям и включениям в полуупорядоченных пространствах;

### **1.3 Требования к результатам освоения дисциплины**

В результате освоения дисциплины аспирант должен:

#### **Знать:**

- основные понятия и утверждения теории полуупорядоченных пространств;
- свойства отображений, действующих в полуупорядоченных пространствах;
- приложения теории полуупорядоченных пространств к исследованию дифференциальных, функционально-дифференциальных и интегральных уравнений и включений.

#### **Уметь:**

- выбирать и строить пространства для решения и исследования различных операторных уравнений и включений, задач оптимального управления;
- использовать свойства отображений полуупорядоченных пространств для исследования разрешимости и получения эффективных оценок решений операторных уравнений.

#### **Владеть:**

- навыками задания отношений порядка в различных функциональных пространствах;
- навыками сведения задач для дифференциальных, функционально-дифференциальных, интегральных уравнений и включений к операторным уравнениям и включениям в полуупорядоченных пространствах;
- навыками построения эффективных оценок решений уравнений и включений различного типа.

## **2. Место дисциплины в структуре программы аспирантуры:**

Дисциплина «Теория отображений полуупорядоченных пространств» относится к образовательному компоненту «Дисциплины (модули)» программы аспирантуры по научной специальности 1.1.2. Дифференциальные уравнения и математическая физика. Дисциплина является элективной.

Дисциплина «Теория отображений полуупорядоченных пространств» изучается во 2 семестре.

## **3. Объём и содержание дисциплины**

### **3.1 Объём дисциплины**

Очная форма обучения: 2 з.е.

Вид учебной работы	Очная форма обучения (всего часов)
<b>Общая трудоёмкость дисциплины</b>	<b>72</b>
<i>Контактная работа (по учебным занятиям)</i>	22
Лекции (Л)	10
Практические (семинарские) занятия (ПЗ)	12
Лабораторные занятия (ЛЗ)	-
<i>Самостоятельная работа (СР)</i>	50
<i>Зачет</i>	

### 3.2 Содержание дисциплины:

№ те мы	Название раздела/темы	Вид учебной работы, час. (очная форма)				Формы текущего контроля
		Л	ПЗ	ЛЗ	СР	
1.	Тема 1. Полуупорядоченные пространства	2	4		15	Индивидуальные домашние задания
2.	Тема 2. Пространства с конусом	2	4		15	Индивидуальные домашние задания
3.	Тема 3. Операторы в полуупорядоченных пространствах	6	4		20	Индивидуальные домашние задания, контрольная работа

#### **Тема 1. Полуупорядоченные пространства**

**Лекция.** Аксиомы полуупорядоченного пространства. Полуупорядоченные пространства общего вида. Верхний и нижний предел. Дополнение полуупорядоченного пространства. Декартово произведение.

##### **Практическое занятие.**

1. Примеры бинарных отношений. Определение свойств отношений. Отношение порядка.
2. Аксиомы полуупорядоченного пространства. Примеры линейно упорядоченных множества (цепи). Примеры полуупорядоченных пространств.
3. Верхний и нижний предел. Нахождение минимального, наименьшего элемента в конкретных пространствах.
4. Примеры полных и секвенциально полных упорядоченных пространств. Пополнение полуупорядоченного пространства.
5. Сформулировать лемму Цорна, теорему Цермелло, теорему Хаусдорфа.

##### **Задания для самостоятельной работы:**

1. Проработка конспектов лекций и вопросов, вынесенных на самостоятельное изучение основной и дополнительной литературы.
2. Конспектирование материалов, работа со справочной литературой.
3. Выполнение индивидуальных домашних заданий, контрольных работ.

#### **Тема 2. Пространства с конусом**

**Лекция.** Конусы и полуупорядоченность. Разновидности конусов. Линейные положительные функционалы. Пространства с двумя конусами. Специальные конусы. Интегральные операторы. Краевые задачи. Двухточечная задача. Линейные положительные операторы. Неразложимые операторы. Оценки спектрального радиуса. Позитивные собственные значения. Несовместные неравенства. Положительная

обратимость. Дифференцируемость по конусу. Производные Фреше-Гато. Производные по конусу. Производные высших порядков. Дифференцирование интегральных операторов. Дифференцирование оператора сдвига.

#### **Практическое занятие.**

1. Привести примеры конусов в линейных пространствах непрерывных, суммируемых, абсолютно непрерывных функций. Выяснить свойства этих конусов. Определить соответствующую полуупорядоченность в линейных пространствах.
2. Линейные положительные функционалы. Примеры линейных положительных функционалов, определенных на конечномерном пространстве, пространствах непрерывных, суммируемых, абсолютно непрерывных функций.
3. Примеры пространств с двумя конусами.
4. Интегральные операторы. Регулярные интегральные операторы в пространствах непрерывных, суммируемых функций.
5. Линейные положительные операторы. Определение и свойства.
6. Краевые задачи. Двухточечная задача. Периодическая задача. Условия положительности оператора Грина.
7. Неразложимые операторы. Оценки спектрального радиуса. Позитивные собственные значения. Примеры.
8. Положительная обратимость. Дифференцируемость по конусу. Производные Фреше-Гато. Производные по конусу. Примеры.
9. Производные высших порядков. Дифференцирование конкретных интегральных операторов.

#### **Задания для самостоятельной работы:**

1. Проработка конспектов лекций и вопросов, вынесенных на самостоятельное изучение основной и дополнительной литературы.
2. Конспектирование материалов, работа со справочной литературой.
3. Выполнение индивидуальных домашних заданий, контрольных работ.

### **Тема 3. Операторы в полуупорядоченных пространствах**

**Лекция.** Основные понятия теории упорядоченных пространств. Монотонные отображения. Теорема Кнастера-Тарского существования неподвижной точки монотонного оператора. Теорема Бирхгофа-Тарского о двустороннем неравенстве. Теорема Канторовича-Тарского с сходимости итераций к неподвижной точке монотонного оператора. Наибольшие и максимальные элементы в множестве неподвижных точек. Полуупорядоченные конусом банаховы пространства. Геометрические свойства конусов в банаховых пространствах. Теоремы о неподвижных точках монотонных и предельно монотонных операторов в банаховых пространствах. Приложения принципов неподвижных точек к исследованию интегральных уравнений в пространствах непрерывных и суммируемых функций. Теоремы Чаплыгина о дифференциальном неравенстве.

#### **Практическое занятие.**

1. Определение и примеры монотонных отображений.
2. Сформулировать теорему Кнастера-Тарского существования неподвижной точки монотонного оператора. Привести примеры применения этой теоремы к исследованию уравнений.
3. Сформулировать теорему Бирхгофа-Тарского о двустороннем неравенстве. Привести примеры применения этой теоремы к исследованию уравнений.
4. Сформулировать теорему Канторовича-Тарского с сходимости итераций к неподвижной точке монотонного оператора. Привести примеры применения этой теоремы к исследованию уравнений, к приближенному решению уравнений.
5. Наибольшие и максимальные элементы в множестве неподвижных точек. Применения к проблеме существования верхних и нижних решений задачи Коши для

дифференциальных уравнений.

6. Сформулировать определение свойства предельной монотонной компактности операторов. Сформулировать теорему о неподвижных точках монотонных и предельно монотонно компактных операторов в банаховых пространствах.
7. Примеры применения принципов неподвижных точек к исследованию интегральных уравнений в пространствах непрерывных и суммируемых функций.
8. Сформулировать теорему Чаплыгина о дифференциальном неравенстве. Какие дополнительные условия надо потребовать, чтобы утверждение теоремы Чаплыгина было справедливо для системы дифференциальных уравнений.

#### **Задания для самостоятельной работы**

1. Проработка конспектов лекций и вопросов, вынесенных на самостоятельное изучение основной и дополнительной литературы.
2. Конспектирование материалов, работа со справочной литературой.
3. Выполнение индивидуальных домашних заданий, контрольных работ.

### **4. Контроль знаний обучающихся**

**4.1 Формы текущего контроля работы аспирантов:** контрольная работа, индивидуальное домашнее задание.

#### **4.2 Задания текущего контроля**

##### Задания для контрольной работы

1. Какие из перечисленных множеств являются конусами в соответствующих пространствах? Каковы геометрические свойства этих конусов?
  - a)  $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2: xy \geq 0\}$ ;
  - b)  $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2: x \leq 0, y \leq 0\}$ ;
  - c)  $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2: x \geq 0\}$ ;
  - d)  $\{f \in C([0; 1], \mathbb{R}) | f: [0; 1] \rightarrow \mathbb{R}, f(x) \geq 0, \forall x \in [0; 1]\}$ ;
  - e)  $\{f \in C([0; 1], \mathbb{R}) | f: [0; 1] \rightarrow \mathbb{R}, \forall x \in [0; 1] \exists f'(x), f'(x) \geq 0\}$ ;
  - f)  $\{f \in C([0; 1], \mathbb{R}) | f: [0; 1] \rightarrow \mathbb{R}, \forall x \in [0; 1] \int_0^x f(t)dt \geq 0\}$ .
2. Приведите примеры монотонных отображений, действующих:
  - a)  $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ , где  $\mathbb{R}^2$  упорядочено конусом  $\mathbb{R}^2_+$ ;
  - b)  $C([0; 1], \mathbb{R}) \rightarrow C([0; 1], \mathbb{R})$ , где  $C([0; 1], \mathbb{R})$  упорядочено конусом неотрицательных функций;
  - c)  $C([0; 1], \mathbb{R}) \rightarrow C([0; 1], \mathbb{R})$ , где  $C([0; 1], \mathbb{R})$  упорядочено конусом неотрицательных неубывающих функций.
3. Оцените решение задачи Коши
$$\dot{x}(t) = (\sin t + 1)^3 \sqrt{x(t)} + \cos t, t \geq 0, \quad x(0) = 1.$$
4. Докажите существование и оцените решение краевой задачи
$$\dot{x}(t) + e^{-t} \cos x(t) - t^2 = 0, t \in [0; 1]; \quad x(0) + x(1) = 1.$$

##### Темы для индивидуальных домашних заданий

1. Основные понятия теории упорядоченных пространств. Проиллюстрировать на множестве натуральных чисел с отношением делимости.
2. Монотонные отображения. Теорема Кнастера-Тарского существования неподвижной точки монотонного оператора.
3. Теорема Бирхгофа-Тарского о двустороннем неравенстве.
4. Теорема Канторовича-Тарского о сходимости итераций к неподвижной точке монотонного оператора.
5. Наибольшие и максимальные элементы в множестве неподвижных точек.
6. Полуупорядоченные конусом банаховы пространства.

7. Геометрические свойства конусов в банаховых пространствах.
8. Исследовать свойства конусов неотрицательных функций в пространствах  $L([0,1], R, \mu)$ ,  $C([0,1], R)$ ,  $AC([0,1], R, \mu)$ ,
9. Теоремы о неподвижных точках монотонных и предельно монотонных операторов в банаховых пространствах.
10. Приложения принципов неподвижных точек к исследованию интегральных уравнений в пространствах непрерывных и суммируемых функций. Доказать теорему об интегральном неравенстве для оператора  $(Ax)(t) = \int_0^t ts \operatorname{arctg} x(s) ds$ , действующем в пространстве  $L([0,1], R, \mu)$ .
11. Теоремы Чаплыгина о дифференциальном неравенстве и их приложения.

#### 4.3 Промежуточная аттестация по дисциплине проводится в форме зачета.

##### Вопросы зачета

1. Основные понятия теории упорядоченных пространств.
2. Монотонные отображения.
3. Теорема Кнастера-Тарского существования неподвижной точки монотонного оператора.
4. Теорема Бирхгофа-Тарского о двустороннем неравенстве.
5. Теорема Канторовича-Тарского сходимости итераций к неподвижной точке монотонного оператора.
6. Наибольшие и максимальные элементы в множестве неподвижных точек.
7. Полуупорядоченные конусом банаховы пространства.
8. Геометрические свойства конусов в банаховых пространствах.
9. Теоремы о неподвижных точках монотонных и предельно монотонных операторов в банаховых пространствах.
10. Приложения принципов неподвижных точек к исследованию интегральных уравнений в пространствах непрерывных и суммируемых функций.
11. Теоремы Чаплыгина о дифференциальном неравенстве.

##### Задания для зачета

1. Приведите примеры конусов в линейных пространствах непрерывных, суммируемых, абсолютно непрерывных функций.
2. Приведите примеры пространств с двумя конусами. Ответ поясните.
3. Приведите пример монотонного отображения, действующего  $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ , где  $\mathbb{R}^2$  упорядочено конусом  $\mathbb{R}^2_+$ .
4. Какие из данных множеств являются конусами в соответствующих пространствах? Каковы геометрические свойства этих конусов?
  - а)  $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2: xy \geq 0\}$ ;
  - б)  $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2: x \leq 0, y \leq 0\}$ ;
5. Приведите примеры использования принципов неподвижной точки к исследованию интегральных уравнений.

#### 4.4 Шкала оценивания промежуточной аттестации

Оценка	Основные показатели достижения результата
«зачтено»	Сформированы, но, возможно содержащие отдельные пробелы, знания о полуупорядоченных пространствах, их свойствах, приложениях к исследованию операторных уравнений и включений различного типа.
	В целом успешное, но, возможно, не систематически осуществляемое умение выбирать и строить подходящие пространства для решения и исследования различных операторных уравнений и включений, задач



	<p>оптимального управления, использовать свойства отображений полуупорядоченных пространств для исследования разрешимости и получения эффективных оценок решений операторных уравнений.</p> <p>В целом успешное, но, возможно, не систематическое владение навыками задания отношений порядка в различных функциональных пространствах, навыками сведения задач для дифференциальных, функционально-дифференциальных, интегральных уравнений и включений к операторным уравнениям и включениям в полуупорядоченных пространствах, навыками построения эффективных оценок решений уравнений и включений различного типа.</p>
«не зачтено»	<p>Отсутствие знаний или фрагментарные знания теории полуупорядоченных пространств, их основных свойств, возможностей использования для исследования операторных уравнений и включений.</p> <p>Отсутствие умений или недостаточное умение выбирать и строить подходящие пространства для решения и исследования различных операторных уравнений и включений, задач оптимального управления, использовать свойства отображений полуупорядоченных пространств для исследования разрешимости и получения эффективных оценок решений операторных уравнений.</p> <p>Отсутствие навыков или фрагментарное владение навыками задания отношений порядка в различных функциональных пространствах, навыками сведения задач для дифференциальных, функционально-дифференциальных, интегральных уравнений и включений к операторным уравнениям и включениям в полуупорядоченных пространствах, навыками построения эффективных оценок решений уравнений и включений различного типа.</p>

## 5. Учебно-методическое и информационное обеспечение дисциплины

### 5.1 Основная литература:

1. Арутюнов, А.В. Лекции по выпуклому и многозначному анализу [Текст] : учеб. пособие / А.В. Арутюнов .— М. : ФИЗМАТЛИТ, 2014 .— 184 с. — ISBN 978-5-9221-1558-2.
2. Жуковский, Е.С. Линейные эволюционные функционально-дифференциальные уравнения в банаховом пространстве [Текст] : Монография / Е.С. Жуковский ; Тамб. гос. ун-т им.Г.Р.Державина .— Тамбов : Изд-во ТГУ, 2003 .— 148 с. — ISBN 5-89016-078-8 : 40.88.
3. Канторович Л.В., Вулих Б.З., Пинскер А.Г. Функциональный анализ в полуупорядоченных пространствах. УРСС, М.: 2010.

### 5.2 Дополнительная литература:

1. Арутюнов, А. В. О структуре множества точек совпадения [Текст] / А. В. Арутюнов, Б. Д. Гельман // Математический сборник .— 2015 .— Т. 206, № 3 .— С. 35-56 .— ISSN 0368-8666 .— Библиогр.: с. 56 (12 назв.).
2. Арутюнов, А. В. Точки совпадения многозначных отображений в частично упорядоченных пространствах [Текст] / А. В. Арутюнов, Е. С. Жуковский, С. Е. Жуковский // Доклады Академии наук .— 2013 .— Т. 453, № 6, декабрь .— С. 595-598.— (Математика) .— ISSN 0869-5652 .— Библиогр. : с. 598 (8 назв.)
3. Крейн С.Г. Функциональный анализ. М.: Наука, 2012.
4. Кусраев А.Г., Тихомиров В.М. Исследования по функциональному анализу и его приложениям. М.: Наука, 2006.
5. Кротов Н.В. Приближенные методы решения нелинейных уравнений. Учебное

пособие. Нижний Новгород, изд-во ННГУ, 2010.

### **5.3 Иные источники:**

1. Биркгоф Г. Теория структур. М.: Наука, 2002.
2. Красносельский М.А. Геометрические методы нелинейного анализа. УРСС, М.: 2006.
3. Красносельский М.А. Положительные решения операторных уравнений. УРСС, М.: 2012.

## **6. Материально-техническое обеспечение дисциплины, программное обеспечение, профессиональные базы данных и информационные справочные системы**

Для проведения занятий по дисциплине необходимо следующее материально-техническое обеспечение: помещения для проведения занятий лекционного и семинарского типа, групповых и индивидуальных консультаций, текущего контроля и промежуточной аттестации, помещения для самостоятельной работы.

Помещения укомплектованы специализированной мебелью и техническими средствами обучения, служащими для представления учебной информации большой аудитории.

Для проведения занятий лекционного типа используются наборы демонстрационного оборудования, обеспечивающие тематические иллюстрации (проектор, ноутбук, экран/ интерактивная доска).

Помещения для самостоятельной работы обучающихся оснащены компьютерной техникой с возможностью подключения к сети «Интернет» и обеспечением доступа в электронную информационно-образовательную среду Университета.

### **Электронная информационно-образовательная среда**

<http://moodle.tsutmb.ru>

Взаимодействие преподавателя и аспиранта в процессе освоения дисциплины осуществляется посредством мультимедийных, гипертекстовых, сетевых, телекоммуникационных технологий, используемых в электронной информационно-образовательной среде университета.

### **Лицензионное программное обеспечение:**

Операционная система Microsoft Windows Vista Business Russian

Kaspersky Endpoint Security для бизнеса – Стандартный Russian Edition. 1500-2499

Node 1 year Educational Renewal Licence

Microsoft Office Профессиональный плюс 2007

### **Информационные справочные системы и профессиональные базы данных:**

ЭБС «Университетская библиотека онлайн»	<a href="http://www.biblioclub.ru">http://www.biblioclub.ru</a>
ЭБС «Консультант студента»: Медицина. Здравоохранение, Комплект Гуманитарные науки	<a href="http://www.studentlibrary.ru">http://www.studentlibrary.ru</a>
ЭБС «IPRSMART» (старое название « IPR books»)	<a href="http://iprbookshop.ru">http://iprbookshop.ru</a>
ЭБС «Юрайт»	<a href="http://www.urait.ru">http://www.urait.ru</a>
Сетевая электронная библиотека педагогических вузов	<a href="https://e.lanbook.com/">https://e.lanbook.com/</a>
Научная электронная библиотека eLIBRARY.RU	<a href="http://elibrary.ru">http://elibrary.ru</a>
Государственная информационная система «Национальная электронная библиотека»	<a href="https://нэб.рф">https://нэб.рф</a>
Президентская библиотека имени Б.Н. Ельцина	<a href="http://www.prilib.ru">http://www.prilib.ru</a>
Электронный справочник «Информо»	<a href="http://www.informio.ru">www.informio.ru</a>
Справочная правовая система «Консультант Плюс»	<a href="http://www.consultant.ru">http://www.consultant.ru</a>
Архив научных журналов зарубежных издательств	<a href="https://arch.neicon.ru">https://arch.neicon.ru</a>